Esercizi su campi conservativi

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Richiami di teoria

Siano

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto}, \quad \overrightarrow{F} : A \to \mathbb{R}^n \text{ campo vettoriale}$$

- Se esiste $\varphi : A \to \mathbb{R}$, differenziabile, tale che

$$\nabla\varphi(\vec{x}) = \overrightarrow{F}(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in A$$

si dice, equivalentemente, che

- $\overrightarrow{F}$ ammette potenziale in A
- $\overrightarrow{F}$ è conservativo in A
- $\overrightarrow{F}$ è un gradiente in A

- Secondo teorema fondamentale del calcolo: sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $\overrightarrow{F} : A \to \mathbb{R}^n$ un campo conservativo continuo (cioè $\overrightarrow{F} = \nabla\varphi$, con $\varphi : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1), allora per ogni curva $\Gamma \subset A$ (reg. a tratti) di estremi $\vec{x}_a$ e $\vec{x}_b$,
$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} = \varphi(\vec{x}_b) - \varphi(\vec{x}_a)$$
cioè $\overrightarrow{F}$ ha integrale curvilineo indipendente dalla traiettoria in A, ma solo dipendente dagli estremi $\vec{x}_a$ e $\vec{x}_b$.

- Se A è connesso per archi, vale il viceversa: dato un campo $\overrightarrow{F} : A \to \mathbb{R}^n$, continuo, sono equivalenti:
  - $\overrightarrow{F}$ è conservativo in A
  - $\overrightarrow{F}$ ha integrale curvilineo indipendente dalla traiettoria in A.
  - l'integrale di $\overrightarrow{F}$ lungo ogni curva chiusa (reg. a tratti) in A è NULLO.

- Determinazione di un potenziale φ di $\overrightarrow{F}$:
  1. $\forall\, \vec{x} \in A$: $\varphi(\vec{x}) := \int_\Gamma \overrightarrow{F}$, con Γ: qualsiasi curva (reg. a tratti) da $\vec{x}_0 \in A$ ad $\vec{x}$.
  2. Se φ è un potenziale di $\overrightarrow{F}$ allora:

$$F_k(\vec{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\vec{x}) \quad k = 1, \ldots, n$$

Quindi ($n = 3$ per semplicità):

$$\int F_1(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 = G_1(x_1, x_2, x_3) + \psi_1(x_2, x_3)$$

$$\int F_2(x_1, x_2, x_3)\, dx_2 = G_2(x_1, x_2, x_3) + \psi_2(x_1, x_3)$$

$$\int F_3(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 = G_3(x_1, x_2, x_3) + \psi_3(x_1, x_2)$$

Ricavo $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ imponendo che

$$G_1 + \psi_1 = G_2 + \psi_2 = G_3 + \psi_3$$

Questo procedimento mi darà gli <u>infiniti</u> potenziali φ (su A connesso per archi, due qualsiasi potenziali per $\vec{F}$ differiscono per una costante)

$$\varphi = G_1 + \psi_1 = G_2 + \psi_2 = G_3 + \psi_3$$

- Condizione necessaria per l'esistenza di un potenziale: dato $\overrightarrow{F} : A \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^1,

$$\text{se } \overrightarrow{F} \text{ è conservativo, allora}$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(\vec{x}) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\vec{x}) \quad \forall\, \vec{x} \in A \ \ \forall\, j, k = 1, \ldots, n$$

- Se A è semplicemente connesso,

$$\overrightarrow{F} : A \to \mathbb{R}^n \text{ è di classe } C^1, \text{ allora}$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(\vec{x}) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\vec{x}) \quad \forall\, \vec{x} \in A \ \ \forall\, j, k = 1, \ldots, n$$

È ANCHE CONDIZIONE SUFFICIENTE per l'esistenza di un potenziale.